Anteckningar 2022-05-05

Elias Almqvist

elalmqvist@gmail.com — `https://wych.dev`

Fallande kropp i atmosfär

Något som faller har tyngdaccelerationen g i $\frac{m}{s^2}$ och en massa m i kg. v är dess hastighet i $\frac{m}{s}$ och F är kraften som verkas på den i newton. Den har dessutom en luftmotståndsfunktion: $\gamma(v)$. Låt positiva ($v > 0$) gå uppåt:

$$F_g = -mg$$

$$F_\gamma = \gamma(v)$$

$$\implies F = \Delta F = F_g - F_\gamma = -mg - \gamma(v)$$

För att få den resulterande accelerationen a dividerar vi med m:

$$a = \frac{F}{m} \because F = ma$$

$$a = \frac{-mg - \gamma(v)}{m} = -\left(g + \frac{\gamma(v)}{m}\right)$$

Vi kan också skriva om a:

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = -\left(g + \frac{\gamma(v)}{m}\right), \quad + \frac{\gamma(v)}{m}$$

$$\therefore \dot{v} + \frac{1}{m}\gamma(v) = -g$$

Nu varierar ekvationen beroende på vad $\gamma(v)$ är för något. Men vi kan anta att $F_\gamma \propto v$ vilket ger:

$$\dot{v} + \frac{1}{m}kv = -g \quad | \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\implies v_h = Ce^{-\frac{k}{m}t} \quad | \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\implies v_p = \frac{-mg}{k}$$

$$\therefore v_a = v_p + v_h = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

Vi har nu den en generell lösning. Behöver bara lösa vad C är givet ett villkor. etc etc.
Exempel:

$$v(0) = 0 \implies C - \frac{mg}{k} = 0 \implies C = \frac{mg}{k}$$

$$\therefore v = \frac{mg}{k}\left(e^{\frac{-k}{m}t} - 1\right)$$