Anteckningar 2022-04-05

Elias Almqvist

elalmqvist@gmail.com — https://wych.dev

Lös ekvationen:

$$y'' = -2y' - 8y + \sin x$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

Lösning:

$$y'' = -2y' - 8y + \sin x, \quad +2y' + 8y$$

$$y'' + 2y' + 8y = \sin x$$

Vi får därmed att $y = y_p + y_h$,
Börjar med den homogena:

$$y'' + 2y' + 8y = 0$$

$$\implies r^2 + 2r + 8 = 0 \quad \text{antag att y är } e^{rx}$$

$$\implies r = -1 \pm \sqrt{-7} = -1 \pm 7i$$

$$\therefore y_h = e^{-x}\left(A\cos(\sqrt{7}x) + B\sin\sqrt{7}x\right) \quad | \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Part lösn: antar att y_p är av formen: $y_p = D\sin x + E\cos x + F \quad | \quad D, E, F \in \mathbb{R}$
Stoppar in den i ekvationen:

$$y_p' = D\cos x - E\sin x$$

$$y_p'' = -\left(D\sin x + E\cos x\right)$$

Vi får därmed:

$$-\left(D\sin x + E\cos x\right) + 2\left(D\cos x - E\sin x\right) + 8\left(D\sin x + E\cos x + F\right) = \sin x$$

$$-D\sin x - E\cos x + 2D\cos x - 2E\sin x + 8D\sin x + 8E\cos x + 8F = \sin x$$

$$2D\cos x - 2E\sin x + 7D\sin x + 7E\cos x + 8F = \sin x$$

$$\implies \begin{cases} 8F = 0 \implies F = 0 \\ 7E + 2D = 0 \\ 7D - 2E = 1 \end{cases}$$

Stoppar in i en matris och får:

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{53} \\ 0 & 1 & \frac{7}{53} \end{bmatrix}$$

$$\therefore y_p = \frac{7}{53}\sin x - \frac{2}{53}\cos x \quad \because E = -\frac{2}{53}, \quad D = \frac{7}{53}$$

Slutligen får vi därmed hela allmäna lösningen:

$$\therefore y = y_p + y_h$$

$$= \frac{7}{53}\sin x - \frac{2}{53}\cos x + e^{-x}\left(A\cos(\sqrt{7}x) + B\sin\sqrt{7}x\right)$$

Givet att $A, B \in \mathbb{R}$